UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS

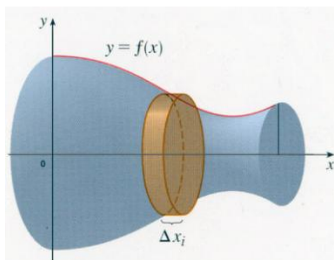
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Cálculo Integral y Matemática II

Semana 11: Sólidos de revolución.

- Método del disco y la arandela.
- Método de cascarones o capas cilíndricas.



ELABORADO POR: ING. JULIO SAMAYOA.

TABLA DE CONTENIDO:

3.2. Sólidos de revolución: Método del disco y arandela. 1

Introducción. 1

Sólidos de revolución: Método del disco y arandela. 2

Ejemplo 1 – Método del disco, rotación alrededor del eje x. 3

Ejemplo 2 – Método del disco, rotación alrededor del eje y. 4

Ejemplo 3 – Método del disco, rotación alrededor de un eje vertical. 6

Ejemplo 4 – Método de la arandela, rotación alrededor del eje x. 9

Ejemplo 5 – Método de la arandela, rotación alrededor de un eje horizontal. 10

Ejemplo 6 – Método de la arandela, rotación alrededor de un eje vertical. 12

3.3. Sólidos de revolución: Método de cascarones o capas cilíndricas. 15

Sólidos de revolución: Método de cascarones o capas cilíndricas. 15

Ejemplo 7 – Método de capas cilíndricas, rotación alrededor del eje x. 16

Ejemplo 8 – Método de capas cilíndricas, rotación alrededor del eje y. 17

Ejemplo 9 – Verificación de ejemplo 1. 18

Ejemplo 10 – Método de capas cilíndricas, rotación alrededor de un eje vertical. 19



3.2. Sólidos de revolución: Método del disco y arandela.

Introducción.

Un **sólido de revolución** es una figura tridimensional que se genera al girar una región plana R alrededor de un eje. Para ilustrar este concepto, consideremos la región R en la figura 3.2.1, que representa a una circunferencia con radio 1 ubicada en el primer cuadrante. Ahora, imaginemos que hacemos girar esta región alrededor del eje x.

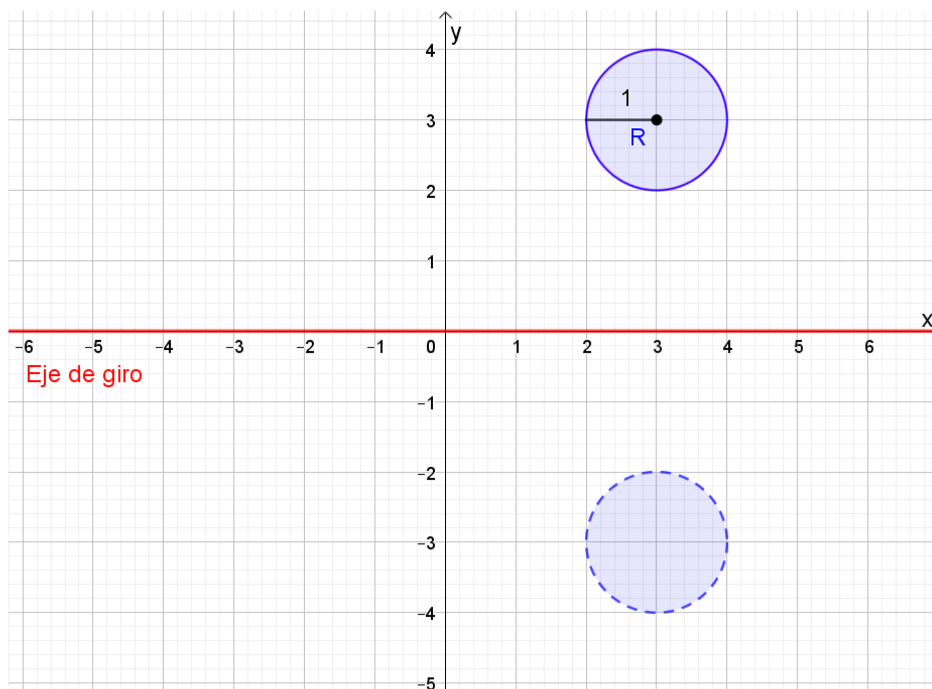


Figura 3.2.1: Circunferencia de radio 1 que girará en torno al eje x.

En la figura 3.2.1, la región circular que aparece debajo del eje x (encerrada por una línea punteada), representa la proyección del giro de la circunferencia superior.

Utilice su imaginación y responda: *“¿Qué forma tendrá el sólido de revolución que se obtiene cuando la región circular R gira alrededor del eje x”*.

Si su respuesta ha sido: *“Una dona o rosquilla”* significa que cuenta con una imaginación privilegiada. Efectivamente, esa es la forma correcta. En la figura 3.2.2, se puede ver una representación tridimensional del sólido de revolución resultante.



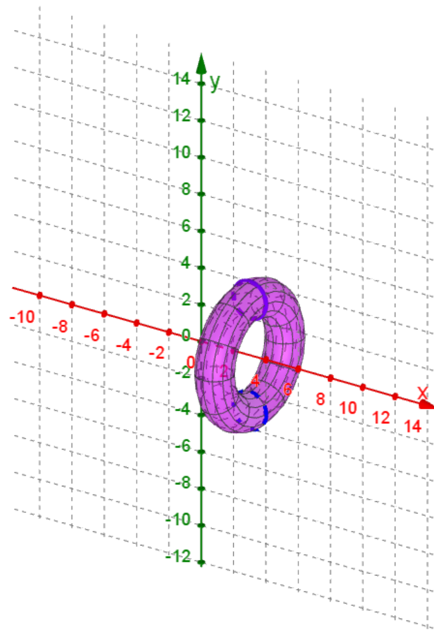


Figura 3.2.2: Sólido de revolución obtenido al girar la circunferencia de radio 1 en torno al eje x.

Ahora que comprendemos el concepto de un sólido de revolución, aprenderemos a calcular el volumen de estos sólidos generados por la rotación de regiones en el plano coordenado alrededor de un eje horizontal o vertical. Para ello, utilizaremos diferentes métodos que explicaremos a continuación.

Sólidos de revolución: Método del disco y arandela.

El **método del disco o de la arandela** es una técnica utilizada para calcular el volumen de un sólido de revolución generado al rotar una región alrededor de un eje (generalmente el eje x o el eje y).

El caso más sencillo es el de un cilindro circular recto, o **disco**, formado al rotar un rectángulo alrededor de un eje que pasa por su base, como se muestra en la 3.2.3.

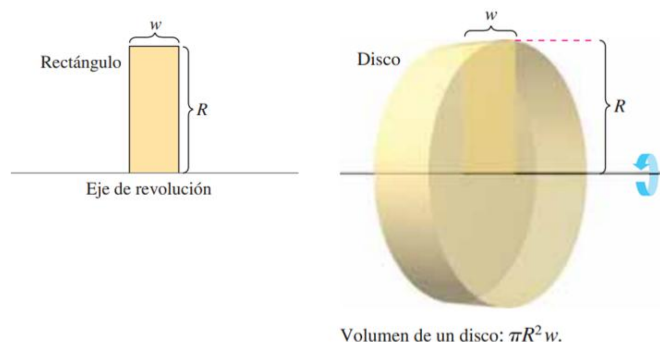




Figura 3.2.3: Disco formado por la revolución de un rectángulo que rota alrededor de un eje que pasa por su base. Adaptada de Ron Larson y Bruce Edwards, “Cálculo. Tomo I”, 10ma Edición.

Identifique que:

- Las dimensiones del rectángulo son: altura R y base w.
- Al girar alrededor del eje que pasa por su base, se genera un disco.
- Las dimensiones del disco generado son: radio R y espesor w.
- El volumen del disco de revolución es:

$$V_{disco} = \acute{A}rea\ c\acute{i}rcular \times Espesor = (\pi R^2) \times (w)$$

$$V_{disco} = \pi R^2 w$$

Ahora, utilizaremos esta fórmula para calcular el volumen de un sólido de revolución en general. Consideremos el sólido mostrado en la figura 3.2.4, que se forma al rotar la región sombreada, delimitada entre $x = a$ hasta $x = b$, alrededor del eje x que pasa por su base.

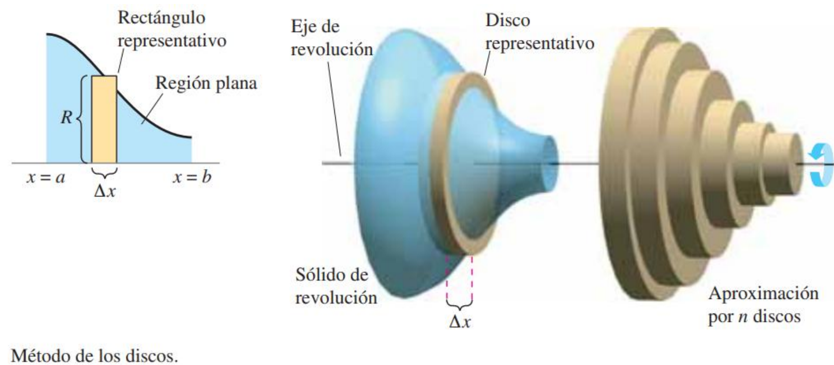


Figura 3.2.4: Método del disco para sólidos de revolución. Adaptada de Ron Larson y Bruce Edwards, “Cálculo. Tomo I”, 10ma Edición.

Si de la región de la figura 3.2.4, tomamos un rectángulo representativo con base Δx y altura R que gira alrededor del eje x, este genera un disco representativo cuyo volumen es:

$$\Delta V = \acute{A}rea\ c\acute{i}rcular \times Espesor = (\pi R^2) \times (\Delta x)$$

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta x$$

Si consideramos una serie de n rectángulos dentro de la región de integración, y hacemos que el número de rectángulos n tienda al infinito, entonces, la base de cada rectángulo Δx tiende a cero, es decir, a Δx tiende a dx, que es infinitesimalmente pequeño. El volumen de cada disco diferencial será:

$$dV = \pi R^2 dx$$



Para obtener el volumen total del sólido de revolución, integramos esta expresión definidamente:

$$\int_0^{V_{sólido}} dV = \int_a^b \pi R^2 dx$$

En esta última expresión, podemos <<sacar>> el factor π de la integral por ser una constante. Sin embargo, R no puede salir de la integral, ya que depende de x, observe que la dimensión o el valor de R varía en cada posición x. Por lo tanto, podemos expresar el radio como $R_{(x)}$, obteniendo:

$$V_{sólido} = \pi \int_a^b R_{(x)}^2 dx \ \ (1)$$

Esta expresión nos permite calcular el volumen de un sólido de revolución, formado por la suma infinita de discos diferenciales, cuyos radios dependen de x.

Realicemos algunos ejemplos para obtener mayor claridad de cómo utilizar este método.

Ejemplo 1 – Método del disco, rotación alrededor del eje x. Determine el volumen V del sólido formado al girar alrededor del eje x la región acotada por las gráficas de: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$; $x = 1$.
Una solución:

Comenzamos bosquejando la región descrita en el problema. Para ello, identifiquemos cada curva.

$y = \sqrt{x} \rightarrow$ Función radical que representa la rama superior de una parábola abierta hacia la derecha $x_{(y)} = y^2$.

$y = 0 \rightarrow$ Es la ecuación del eje x.

$x = 1 \rightarrow$ Recta vertical que corta al eje x en $x = 1$.

El bosquejo de la región encerrada se muestra a continuación.

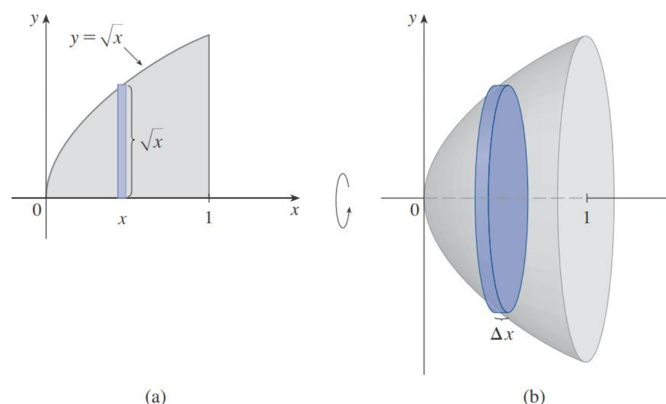




Figura 3.2.5: Región del ejemplo 1. Adaptada de James Stewart, "Cálculo Transcendentes Tempranas", 8va Edición.

Observando la figura 3.2.5, notamos que el elemento diferencial tiene una altura igual a la función $f_{(x)} = \sqrt{x}$ (mejor dicho, la altura del diferencial es $\sqrt{x} - 0$, ya que $y = 0$ es la ecuación del eje x). Esta altura corresponde al radio del disco que se forma al rotar alrededor del eje x.

Ahora, utilizamos la fórmula (1):

$$V_{sólido} = \pi \int_a^b R_{(x)}^2 dx \;\; (1)$$

Sustituimos el radio del disco $R_{(x)} = f_{(x)} = \sqrt{x}$, y realizando la integración desde $x = 0$ hasta $x = 1$, (ya que se sumarán infinitos discos en el intervalo $[0,1]$), obteniendo:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 x\, dx$$

Este resultado es **la integral que representa el volumen del sólido de revolución**. Es importante notar que en algunos problemas futuros solo se le pedirá plantear o escribir la integral que representa el volumen del sólido, sin necesidad de calcular su valor numérico.

En el ejemplo 1, sin embargo, se solicita determinar el volumen, por lo tanto, resolvemos la integral:

$$V = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{1} = \pi \left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right]$$

$$V = \frac{\pi}{2}\,(ul)^3$$

Ejemplo 2 – Método del disco, rotación alrededor del eje y. Determine el volumen V del sólido formado al girar alrededor del eje y la región acotada por las gráficas de: $y = x^3$, $y = 8$; $x = 0$.
Una solución:

Nuevamente, comenzamos la solución identificando cada curva.

$y = x^3 \rightarrow$ Función cúbica básica, centrada en el origen.

$y = 8 \rightarrow$ Recta horizontal que corta al eje y en $y = 8$.

$x = 0 \rightarrow$ Es la ecuación del eje y.

El bosquejo de la región encerrada se muestra a continuación.



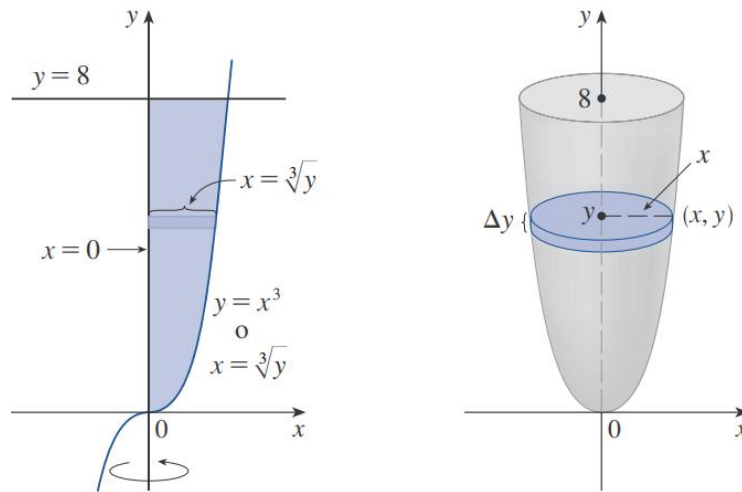


Figura 3.2.6: Región del ejemplo 2. Adaptada de James Stewart, “Cálculo Transcendentes Tempranas”, 8va Edición.

A diferencia del ejemplo 1, aquí tomamos un elemento diferencial **horizontal** (es decir, dy), ya que al girar alrededor del eje y, este elemento genera un disco diferencial en posición horizontal.

La altura del elemento diferencial es dy, y su longitud corresponde al radio del disco de revolución $R_{(y)}$. Por lo tanto, la fórmula (1) se adapta de la siguiente manera:

$$V_{sólido} = \pi \int_c^d R_{(y)}^2 dy \;\; (2)$$

Donde el intervalo $[c, d]$ es el intervalo de integración, que en este caso será $[0,8]$, intervalo en el cual se sumarán infinitos discos diferenciales. El radio del disco será:

$$R_{(y)} = función\ cúbica\ escrita\ en\ términos\ de\ y - ecuación\ del\ eje\ y$$

$$R_{(y)} = \left(+\sqrt[3]{y}\right) - (0) = \sqrt[3]{y}$$

Evaluamos la fórmula (2), obteniendo:

$$V = \pi \int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy$$

$$V = \frac{3}{5}\pi y^{\frac{5}{3}} \Big|_{y=0}^{8} = \frac{3}{5}\pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^5 \Big|_{y=0}^{8} = \frac{3}{5}\pi\left[\left(\sqrt[3]{8}\right)^5 - \left(\sqrt[3]{0}\right)^5\right] = \frac{3}{5}\pi(2)^5$$

$$V = \frac{96}{5}\pi\,(ul)^3 = \left(19\frac{1}{5}\right)\pi\,(ul)^3$$



Ejemplo 3 – Método del disco, rotación alrededor de un eje vertical. Escriba una integral que permita calcular el volumen V del sólido formado al girar alrededor de la recta $x = 1$ la región acotada por las gráficas de: $x = 1;\; x + y^2 - 6y + 4 = 0$.
Una solución:

Identificando cada curva.

$x = 1 \rightarrow$ Recta vertical que corta al eje x en $x = 1$ y a la vez, es el eje de giro.

$x_{(y)} = -y^2 + 6y - 4 \rightarrow$ Parábola horizontal abierta a la izquierda, se requiere conocer su vértice.

Calculando vértice con criterio de la primera derivada. Derivando $x_{(y)} = -y^2 + 6y - 4$:

$x' = -2y + 6 \rightarrow$ Haciendo $x' = 0 : \rightarrow 0 = -2y + 6 \rightarrow y = 3$

Evaluando en expresión original $x_{(y)} = -y^2 + 6y - 4$:

$x_{(3)} = -(3)^2 + 6(3) - 4 = -9 + 18 - 4 = 9 - 4 \rightarrow x = 5 \rightarrow$ El vértice es: $V(5,3)$.

Se requiere los cortes de la parábola con la recta $x = 1$, igualándolas:

$$1 = -y^2 + 6y - 4 \rightarrow y^2 - 6y + 5 = 0 \rightarrow (y-5)(y-1) = 0 \rightarrow y_1 = 5, y_2 = 1 \rightarrow \begin{cases} A(1,5) \\ B(1,1) \end{cases}$$

El gráfico de la región descrita se muestra en la figura 3.2.7:

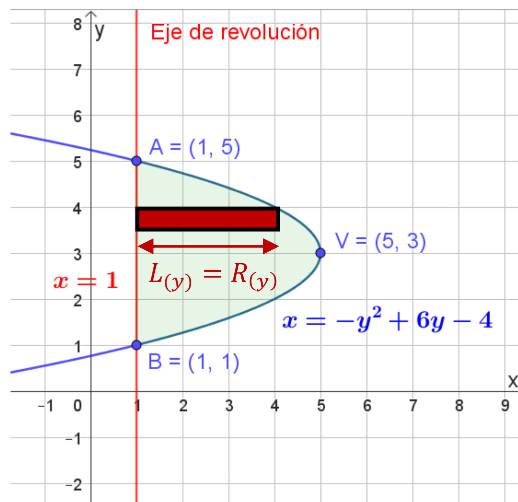


Figura 3.2.7: Región del ejemplo 3.



Como se muestra en la figura 3.2.7, es posible resolver el problema sin necesidad de dibujar ni el disco generado por la revolución del diferencial dy ni el sólido de revolución.

El radio del disco $R_{(y)}$ será la diferencia entre funciones (la de la derecha menos la de la izquierda):

$$R_{(y)} = x_{parábola} - x_{eje\ de\ giro} = (-y^2 + 6y - 4) - (1)$$

$$R_{(y)} = -y^2 + 6y - 5$$

Utilizando fórmula (2):

$$V_{sólido} = \pi \int_c^d R_{(y)}^2 dy \ \ (2)$$

El intervalo de integración será desde $y = 1$ hasta $y = 5$, es decir, cuando se sumen infinitos discos horizontales.

$$V = \pi \int_1^5 (-y^2 + 6y - 5)^2 \, dy$$

No es necesario calcular la integral porque el ejemplo no lo solicita. Sin embargo, si lo desea hacer, su resultado debe ser:

$$V = \frac{512\pi}{15} \ (ul)^3$$

Como se mencionó anteriormente, no es necesario dibujar el sólido de revolución para resolver este problema. Sin embargo, se recomienda que trate de imaginarlo y hacer un bosquejo para una mejor comprensión.

Método de la arandela. Una extensión del método del disco.

El método del disco se puede extender para cubrir sólidos de revolución con agujeros, reemplazando el disco representativo por una arandela representativa. Esta arandela se forma al girar un rectángulo alrededor de **un eje que no pasa por su base**, como se ilustra en la figura 3.2.8.



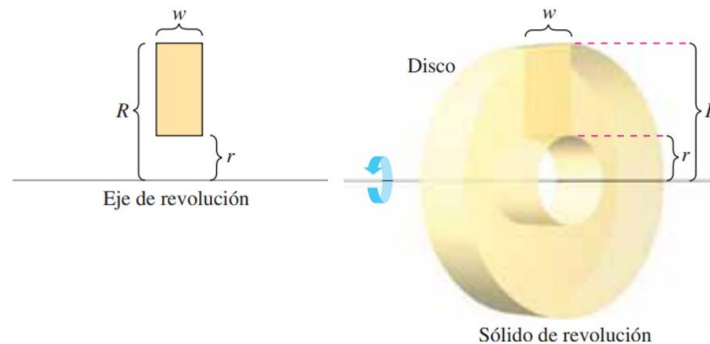


Figura 3.2.8: Arandela formada por la revolución de un rectángulo que rota alrededor de un eje que no pasa por su base. Adaptada de Ron Larson y Bruce Edwards, "Cálculo. Tomo I", 10ma Edición.

Identifique que:

- Las dimensiones del rectángulo son: altura $R - r$ y base w.
- Al girar alrededor del eje que no pasa por su base, se genera una arandela.
- Las dimensiones de la arandela generada son: radio exterior R, radio interior r y espesor w.
- El volumen de la arandela de revolución es:

$$V_{arandela} = \acute{A}rea\ circular\ \times Espesor = (\pi R^2 - \pi r^2) \times (w)$$
$$V_{arandela} = \pi(R^2 - r^2)\, w$$

Ahora, utilizaremos esta fórmula para calcular el volumen de un sólido de revolución en general.

Consideremos el sólido mostrado en la figura 3.2.9, que se forma al rotar la región sombreada, delimitada entre $x = a$ hasta $x = b$, alrededor del eje x el cual no pasa por su base:

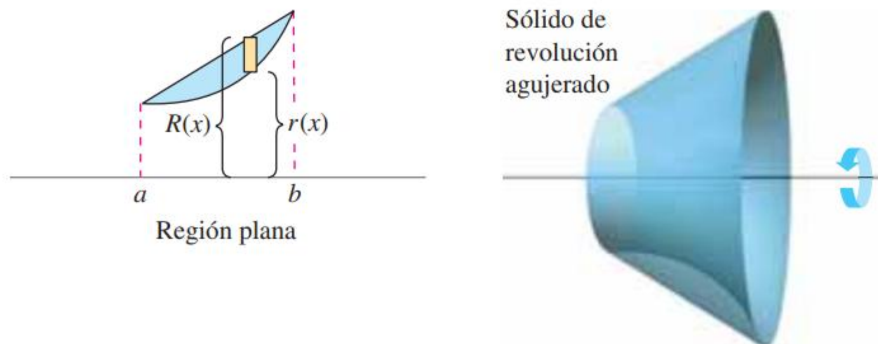


Figura 3.2.9: Método de arandelas para sólidos de revolución. Adaptada de Ron Larson y Bruce Edwards, "Cálculo. Tomo I", 10ma Edición.

De manera similar al método del disco, el volumen del sólido de revolución corresponde a la suma de infinitas arandelas diferenciales cuando $w = \Delta x$ tiende a cero, es decir, $\Delta x \rightarrow dx$:



$$\Delta V = \pi\left[R_{(x)}^2 - r_{(x)}^2\right]\Delta x$$

$$dV = \pi\left[R_{(x)}^2 - r_{(x)}^2\right]dx$$

$$\int_0^{V_{sólido}} dV = \int_a^b \pi\left[R_{(x)}^2 - r_{(x)}^2\right]\Delta x$$

$$V_{sólido} = \pi \int_a^b \left[R_{(x)}^2 - r_{(x)}^2\right] dx \ (3)$$

Ejemplo 4 – Método de la arandela, rotación alrededor del eje x. La región $\mathcal{R}$ encerrada por las curvas $y = x$; $y = x^2$ gira alrededor del eje x. Determine el volumen del sólido resultante.

Una solución:

Identificando cada curva.

$y = x \rightarrow$ Función identidad. Recta que pasa por el origen, inclinada a 45° sobre el eje $+x$.

$y = x^2 \rightarrow$ Parábola vertical básica, abierta hacia arriba y con vértice en el origen.

Se requiere los puntos de corte entre las curvas. Igualando sus ecuaciones:

$$x = x^2 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 \rightarrow \text{Evaluando en } y = x \rightarrow \begin{cases} y_{(0)} = 0 \rightarrow (0,0) \\ y_{(1)} = 1 \rightarrow (1,1) \end{cases}$$

El gráfico de la región descrita se muestra en la figura 3.2.10:

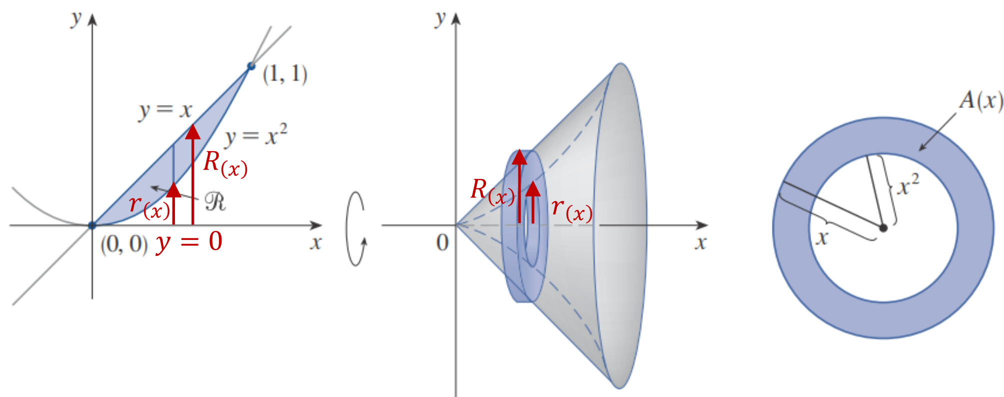


Figura 3.2.10: Región del ejemplo 4. Adaptada de James Stewart, "Cálculo Transcendentes Tempranas", 8va Edición.



Como se muestra en la figura 3.2.10, al hacer rotar un elemento diferencial dx alrededor del eje x, se forma una arandela con radios exterior e interior R y r, respectivamente, que se calculan como:

$R_{(x)} = y_{recta} - y_{eje\ de\ giro} = (x) - (0) \rightarrow R_{(x)} = x \rightarrow$ Radio exterior.

$r_{(x)} = y_{parábola} - y_{eje\ de\ giro} = (x^2) - (0) \rightarrow r_{(x)} = x^2 \rightarrow$ Radio interior.

Utilizando fórmula (3):

$$V_{sólido} = \pi \int_a^b \left[R_{(x)}^2 - r_{(x)}^2\right] dx \ (3)$$

El intervalo de integración será desde $x = 0$ hasta $y = 0$, es decir, cuando se sumen infinitas arandelas verticales:

$$V = \pi \int_0^1 [(x)^2 - (x^2)^2]\, dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$$

$$V = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{x=0}^{1} = \pi \left[\left(\frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^5}{5}\right) - (0)\right] = \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \pi \left[\frac{5-3}{15}\right]$$

$$V = \frac{2}{15}\pi \ (ul)^3$$

Ejemplo 5 – Método de la arandela, rotación alrededor de un eje horizontal. Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región $\mathcal{R}$ del ejemplo 4 alrededor de la recta $y = 2$.

Una solución:

En el ejemplo 4 hemos determinado bosquejado la región $\mathcal{R}$, retomándola para este ejemplo:

El gráfico de la región descrita se muestra en la figura 3.2.11:



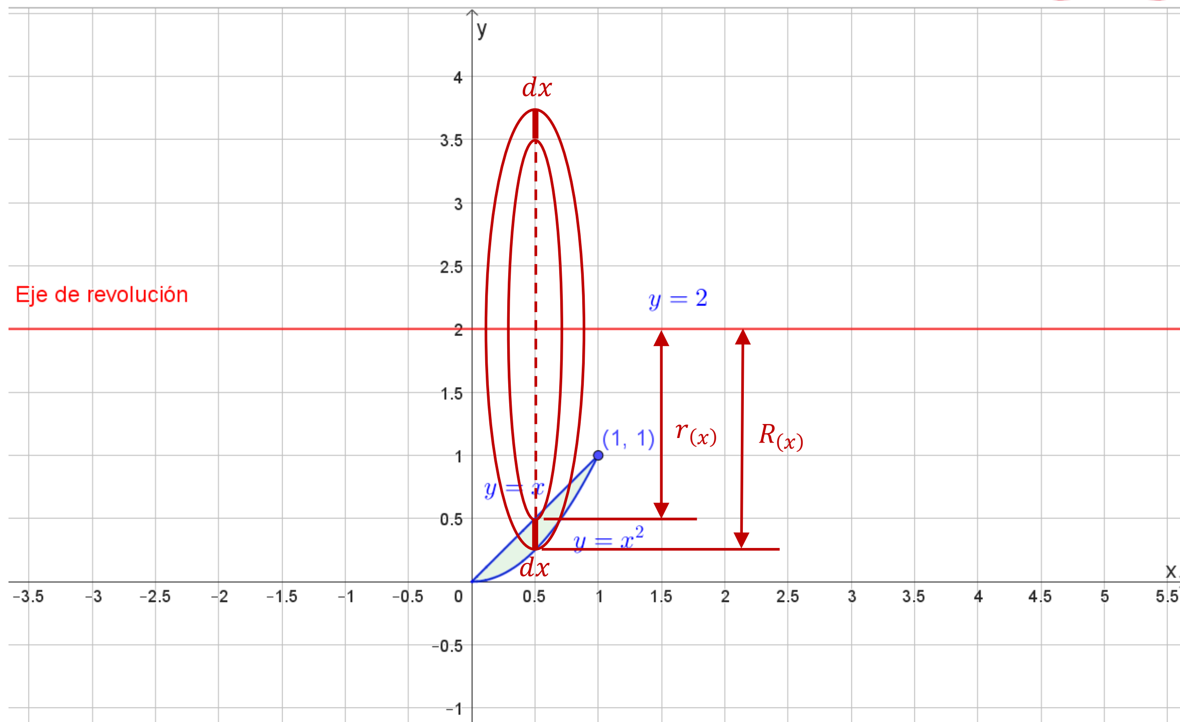


Figura 3.2.11: Región del ejemplo 5. Esquema simplificado de arandela de revolución.

Como se muestra en la figura 3.2.11, las arandelas de revolución pueden generarse utilizando un esquema simplificado. Este enfoque es aplicable a todos los métodos de cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

Calculemos los radios interior y exterior de la arandela diferencial mostrada en la figura 3.2.11. Ambos radios se obtienen restando las correspondientes funciones, como se detalla a continuación:

$R_{(x)} = y_{eje\ de\ giro} - y_{parábola} = (2) - (x^2) \rightarrow R_{(x)} = 2 - x^2 \rightarrow$ Radio exterior.

$r_{(x)} = y_{eje\ de\ giro} - y_{recta} = (2) - (x) \rightarrow r_{(x)} = 2 - x \rightarrow$ Radio interior.

Una alternativa para abordar este problema es representarlo en tres dimensiones, como se ilustra en la figura 3.2.12. Puede elegir el enfoque que le resulte más conveniente para su comprensión.



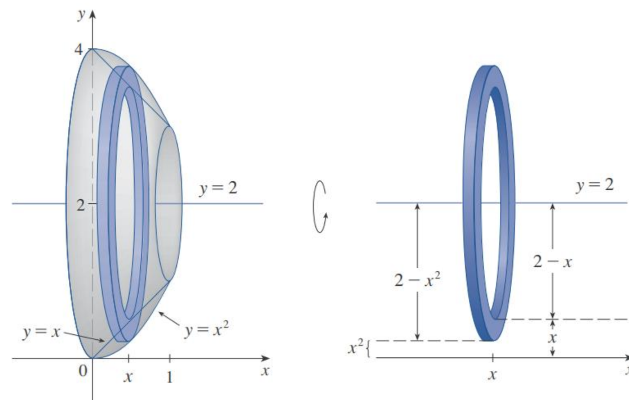


Figura 3.2.12: Región del ejemplo 5. Adaptada de James Stewart, "Cálculo Transcendentes Tempranas", 8va Edición

Ahora, evaluamos la fórmula (3) en el intervalo de integración $[0,1]$:

$$V_{sólido} = \pi \int_a^b \left[R_{(x)}^2 - r_{(x)}^2\right] dx \ (3)$$

$$V = \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\, dx = \pi \int_0^1 [4 - 4x^2 + x^4 - 4 + 4x - x^2]\, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\, dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_{x=0}^{1}$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{(1)^5}{5} - \frac{5(1)^3}{3} + 2(1)^2\right) - (0)\right] = \pi \left[\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 2\right] = \pi \left[\frac{3}{15} - \frac{25}{15} + \frac{30}{15}\right]$$

$$V = \frac{8}{15}\pi \ (ul)^3$$

Ejemplo 6 – Método de la arandela, rotación alrededor de un eje vertical. Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región $\mathcal{R}$ del ejemplo 4 alrededor de la recta $x = -1$.

Una solución:

El esquema simplificado se muestra a continuación:



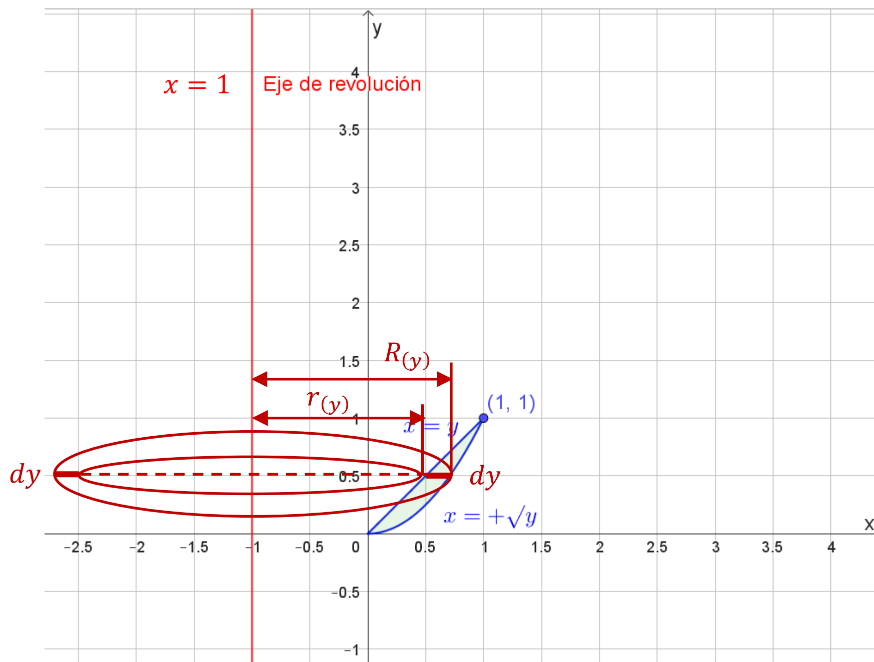


Figura 3.2.13: Región del ejemplo 6. Esquema simplificado de arandela de revolución.

Observe que ahora se forman arandelas horizontales cuando un diferencial dy rota alrededor de la recta $x = -1$.

Los radios exterior e interior de la arándola se calculan como funciones de y de la siguiente manera:

$R_{(y)} = x_{parábola} - x_{eje\ de\ giro} = (\sqrt{y}) - (-1) \rightarrow R_{(y)} = \sqrt{y} + 1 \rightarrow$ Radio exterior.

$r_{(y)} = x_{recta} - x_{eje\ de\ giro} = (y) - (-1) \rightarrow r_{(y)} = y + 1 \rightarrow$ Radio interior.

Siempre tiene la alternativa de abordar este problema representándolo en tres dimensiones, como se ilustra en la figura 3.2.14. Como lo prefiera.

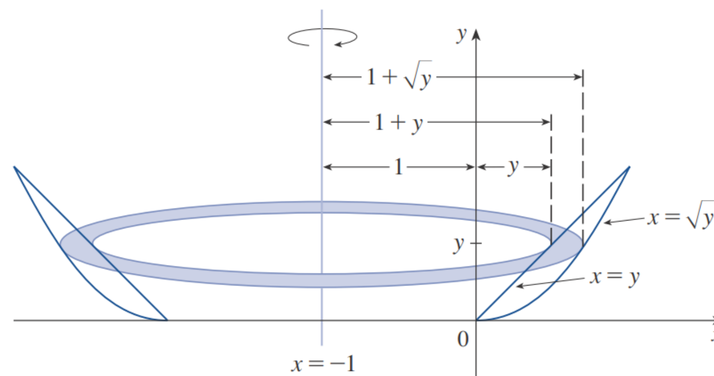




Figura 3.2.14: Región del ejemplo 6. Adaptada de James Stewart, "Cálculo Transcendentes Tempranas", 8va Edición.

Ahora, debemos adaptar la fórmula (3) en términos de y, obteniendo la fórmula (4):

$$V_{sólido} = \pi \int_c^d [R_{(y)}^2 - r_{(y)}^2]\, dy \ (4)$$

El intervalo de integración en y será de $[0,1]$ pero no se confunda, el intervalo de integración del ejemplo anterior y este es el mismo, pero eso simplemente es una casualidad.

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{y}+1\right)^2 - (y+1)^2\right] dy = \pi \int_0^1 \left[y + 2\sqrt{y} + 1 - y^2 - 2y - 1\right] dy$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(-y^2 - y + 2y^{\frac{1}{2}}\right) dy = \pi \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2\left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right)\right)\Bigg|_{y=0}^{1}$$

$$V = \pi \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{4}{3}\left(\sqrt{y}\right)^3\right)\Bigg|_{y=0}^{1}$$

$$V = \pi \left[\left(-\frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2} + \frac{4}{3}\left(\sqrt{1}\right)^3\right) - (0)\right] = \pi \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right] = \pi \left[\frac{3}{3} - \frac{1}{2}\right] = \pi \left[1 - \frac{1}{2}\right]$$

$$V = \frac{\pi}{2}\ (ul)^3$$



3.3. Sólidos de revolución: Método de cascarones o capas cilíndricas.

Sólidos de revolución: Método de cascarones o capas cilíndricas.

El **método de cascarones cilíndricos** es una alternativa al método de discos y arandelas. Este método se utiliza cuando el elemento diferencial rota alrededor de un **eje paralelo a dicho elemento**, generando capas cilíndricas (o cascarones cilíndricos).

En contraste con el método de discos y arandelas, donde el eje de revolución es **perpendicular** al elemento diferencial (puede revisar los ejemplos anteriores y verificar esta información), en el método de capas cilíndricas el eje de revolución es **paralelo** al elemento diferencial.

La elección entre ambos métodos depende del problema, ya que en algunos casos uno puede simplificar el proceso de integración más que el otro.

Para introducirnos en este método, considere un rectángulo representativo como el que se muestra en la figura 3.3.1, donde:

- w es su espesor.
- h es su longitud (o su altura si está en posición vertical).
- p es la distancia entre el eje de revolución y el centro del rectángulo.

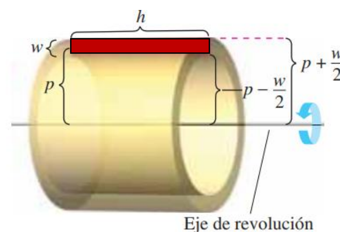


Figura 3.3.1: Cascarón cilíndrico formado por la revolución de un rectángulo que rota alrededor de un **eje paralelo** que no pasa por su base. Adaptada de Ron Larson y Bruce Edwards, "Cálculo. Tomo I", 10ma Edición.

Cuando este rectángulo gira alrededor de un eje paralelo, se forma un sólido llamado **cascarón cilíndrico**. Para determinar su volumen, consideremos dos cilindros, uno mayor y otro menor.

El radio del cilindro más grande R corresponde al radio exterior de la capa, y el radio del cilindro más pequeño r corresponde al radio interior. Debido a que p representa el radio promedio de la capa, se sabe que:

- El radio exterior es $R = p + \frac{w}{2}$.
- Y el radio interior es $r = p - \frac{w}{2}$.

El volumen de la capa cilíndrica es la diferencia entre los volúmenes de ambos cilindros:



$$V_{capa} = V_{cilindro\ mayor} - V_{cilindro\ menor}$$

$$V_{capa} = (Área \times Longitud)_{cilindro\ mayor} - (Área \times Longitud)_{cilindro\ menor}$$

$$V_{capa} = \pi R^2 \times h - \pi r^2 \times h$$

$$V_{capa} = \pi\left(p + \frac{w}{2}\right)^2 h - \pi\left(p - \frac{w}{2}\right)^2 h = \pi h\left[\left(p + \frac{w}{2}\right)^2 - \left(p - \frac{w}{2}\right)^2\right]$$

$$V_{capa} = \pi h\left[p^2 + pw + \frac{w^2}{4} - p^2 + pw - \frac{w^2}{4}\right]$$

Simplificando:

$$V_{capa} = 2\pi hpw = 2\pi \times altura \times radio\ promedio \times espesor$$

Esta fórmula nos permite calcular el volumen de un sólido de revolución generado por capas cilíndricas. Por ejemplo, para el sólido mostrado en la figura 3.3.2.

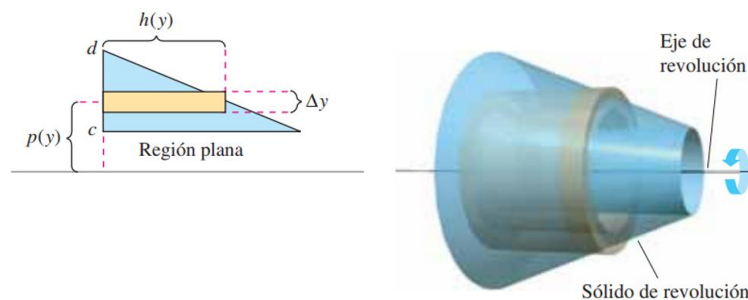


Figura 3.3.2: Rectángulo horizontal que rota alrededor de un **eje paralelo** que no pasa por su base generando un sólido de revolución. Adaptada de Ron Larson y Bruce Edwards, "Cálculo. Tomo I", 10ma Edición.

Observe que, el rectángulo horizontal de la figura:

- Tiene un espesor $w = \Delta y$.
- Tiene una longitud (o altura) $h_{(y)}$.
- Y gira con un radio promedio es $p_{(y)}$.

Por lo tanto, el volumen del cascarón cilíndrico de revolución es:

$$\Delta V_{capa} = 2\pi h_{(y)} p_{(y)} \Delta y$$

Si nuevamente, hacemos que Δy tienda a cero, es decir, $\Delta y \to dy$, entonces, el volumen diferencial será:

$$dV_{capa} = 2\pi h_{(y)} p_{(y)} dy$$



Si sumamos infinitas capas diferenciales, es decir, integramos definidamente en el intervalo $[c, d]$, obtenemos:

$$\int_0^{V_{sólido}} V_{capa} = \int_c^d 2\pi h_{(y)} p_{(y)}\, dy$$

$$V_{sólido} = 2\pi \int_c^d h_{(y)} p_{(y)}\, dy \ (5)$$

Esta última expresión nos permite calcular el volumen de sólidos de revolución por medio del método de capas cilíndricas.

Si es necesario realizar integración con respecto a x, la fórmula es similar y se adapta de la siguiente manera:

$$V_{sólido} = 2\pi \int_a^b h_{(x)} p_{(x)}\, dx \ (6)$$

Con la información presentada hasta este momento, el estudiante ya cuenta con los recursos necesarios para calcular volúmenes de sólidos de revolución por distintos métodos.

Ejemplo 7 – Método de capas cilíndricas, rotación alrededor del eje x. Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje x la región acotada por $f_{(x)} = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$. La región se muestra en la figura 3.3.3.

Una solución:

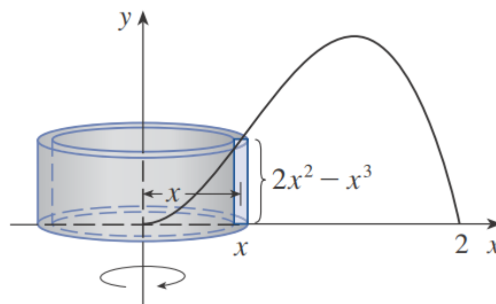


Figura 3.3.3: Región del ejemplo 7. Adaptada de James Stewart, “Cálculo Transcendentes Tempranas”, 8va Edición.

De la figura, identificamos que las dimensiones de la capa cilíndrica son:

- Altura: $h_{(x)} = 2x^2 - x^3$.
- Radio promedio: $p_{(x)} = x$.



Utilizando fórmula (6):

$$V_{sólido} = 2\pi \int_a^b h_{(x)} p_{(x)}\, dx \ (6)$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)(x)\, dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\, dx = 2\pi \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{x=0}^{2}$$

$$V = 2\pi \left(\frac{1}{2}(2)^4 - \frac{1}{5}(2)^5\right) = 2\pi \cdot (2)^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) = 2\pi \cdot (2)^4 \left(\frac{1}{10}\right) = \pi \cdot (2)^4 \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$V = \frac{16\pi}{5}\ (ul)^3$$

Ejemplo 8 – Método de capas cilíndricas, rotación alrededor del eje y. Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región acotada por $y = x^2$ y la función identidad. La región se muestra en la figura 3.3.4.

Una solución:

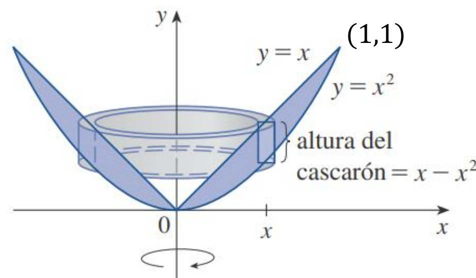


Figura 3.3.4: Región del ejemplo 8. Adaptada de James Stewart, "Cálculo Transcendentes Tempranas", 8va Edición.

De la figura, identificamos que las dimensiones de la capa cilíndrica son:

- Altura: $h_{(x)} = y_{recta} - y_{parábola} = (x) - (x^2) \rightarrow h_{(x)} = x - x^2$.
- Radio promedio: $p_{(x)} = x$.

Utilizando fórmula (6):

$$V_{sólido} = 2\pi \int_a^b h_{(x)} p_{(x)}\, dx \ (6)$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (x - x^2)(x)\, dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = 2\pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{x=0}^{1}$$



$$V = 2\pi\left(\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{4}(1)^4\right) = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi\left(\frac{1}{12}\right) \rightarrow V = \frac{\pi}{6}\ (ul)^3$$

Ejemplo 9 – Verificación de ejemplo 1. Retome el ejemplo 1 que fue resuelto por el método del disco y ahora utilice el método de capas cilíndricas para calcular nuevamente el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje x la región acotada por $y = \sqrt{x}, y = 0; x = 1$. La región se muestra en la figura 3.3.5.

Una solución:

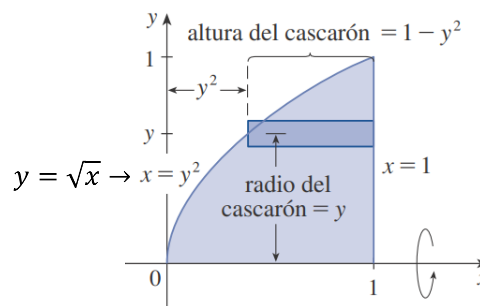


Figura 3.3.5: Región del ejemplo 9 (misma del ejemplo 1). Adaptada de James Stewart, "Cálculo Transcendentes Tempranas", 8va Edición.

De la figura, identificamos que las dimensiones de la capa cilíndrica son:

- Altura: $h_{(y)} = x_{recta\ vertical} - x_{función\ radical} = (1) - (y^2) \rightarrow h_{(y)} = 1 - y^2$.
- Radio promedio: $p_{(y)} = y$.

Utilizando fórmula (5):

$$V_{sólido} = 2\pi \int_c^d h_{(y)} p_{(y)}\, dy \quad (5)$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (1 - y^2)(y)\, dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\, dy = 2\pi\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{y=0}^{1}$$

$$V = 2\pi\left(\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{4}(1)^4\right) = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow V = \frac{\pi}{2}\ (ul)^3$$

Conclusión: El resultado obtenido es consistente con el del ejemplo 1.



Ejemplo 10 – Método de capas cilíndricas, rotación alrededor de un eje vertical. Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor de la recta $x = 2$ la región acotada por $y = x - x^2$; $y = 0$. La región se muestra en la figura 3.3.6.

Una solución:

Vértice de la parábola $V_{(h,k)}$:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$k = c - \frac{b^2}{4a} = 0 - \frac{(1)^2}{4(-1)} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore V_{(h,k)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

Cortes de parábola $y = x - x^2$ y el eje x, es decir, $y = 0$:

$$x - x^2 = 0 \rightarrow x(1 - x) = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1 \rightarrow \therefore \begin{cases}(0,0)\\(1,1)\end{cases}$$

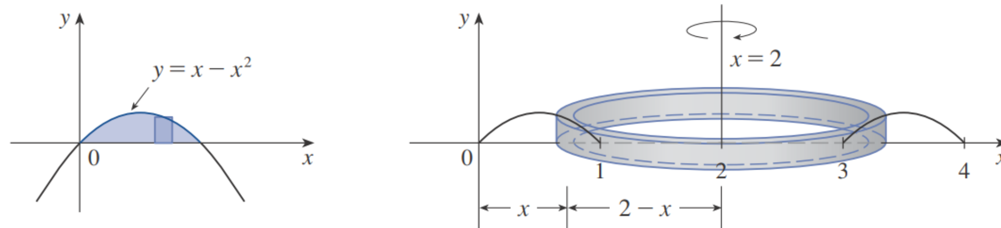


Figura 3.3.6: Región del ejemplo 10. Adaptada de James Stewart, "Cálculo Transcendentes Tempranas", 8va Edición.

De la figura, identificamos que las dimensiones de la capa cilíndrica son:

- Altura: $h_{(x)} = y_{parábola} - y_{eje\ x} = (x - x^2) - (0) \rightarrow h_{(x)} = x - x^2$.
- Radio promedio: $p_{(x)} = (2) - (x) \rightarrow p_{(x)} = 2 - x$.

Utilizando fórmula (6):

$$V_{sólido} = 2\pi \int_a^b h_{(x)} p_{(x)}\, dx \ (6)$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (x - x^2)(2 - x)\, dx = 2\pi \int_0^1 (2x - x^2 - 2x^2 + x^3)\, dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx$$

$$V = 2\pi \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right)\Big|_{x=0}^{1} = 2\pi \left(\frac{1}{4}(1)^4 - (1)^3 + (1)^2\right) = 2\pi \left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow V = \frac{\pi}{2}\ (ul)^3$$